$3^{ème}$ Tech : T_2 - T_3	**Devoir de Synthèse N°1** **Mathématiques**	Lycée secondaire : Teboulba Le 05 / 12 / 2005 Durée : 2 H

Exercice N°1 : (10 points) Barème : (0.5 + 1.5 + 1 + 1 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 = **10**)

Soit la fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 5 + m}{x - 3} & \text{Si } x \in]-\infty, 2] \quad ; (m \in IR) \\ f(x) = 3x^2 - 8 & \text{Si } x \in]2, 4[\\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} & \text{Si } x \in [4, +\infty[\end{cases}$$

1-/ a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2-/ a) f est-elle continue en 4 **?**

b) Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 2.

3-/ **On prend** $m = -3$:

a) Montrer que f est continue sur $]-\infty, 4[$.

b) Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x$.

c) Calculer : $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3}$; $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5}$.

d) Etudier la limite de $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ lorsque x tend vers 2.

Exercice N°2 : (10 points)

Barème :

(*I*- 1.25 + 0.25 + 0.25 + 1 + 0.25 = **3**)(*II*- 0.5 + 1 + 0.5 + 0.5 = **2.5**)(*III*- 0.5 + 1.25 + 1.25 + 1 + 0.5 = **4. 5**)

I – Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et $Cos^2 x = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$.

1-/ a) Calculer $Cos(2x)$ puis $Sin(2x)$.

b) En déduire la valeur de x.

2-/ a) Calculer $\left(\sqrt{2} - 1\right)^2$.

b) Montrer que : $Tg^2 x = 3 - 2\sqrt{2}$.

c) En déduire la valeur de $Tg\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Voir verso

II – On pose : $A(x) = Cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + Cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

1-/ Calculer : $A\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2-/ a) Montrer que : $A(x) = 2.Cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right).Cos(x)$.

b) En déduire $A\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en fonction de $Cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

c) Donner alors la valeur de $Cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

III – On pose : $B(x) = Sin(2x) + Cos(2x) - 1$.

1-/ Calculer $B\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2-/ a) Montrer que, pour tout $x \in IR$: $B(x) = 2Sinx.(Cosx - Sinx)$.

b) Montrer que, pour tout $x \in IR$, on a : $B(x) = 2\sqrt{2}Sinx.Cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

c) Montrer alors que $B\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sqrt{2}Sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$. (On pourra remarquer que : $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$).

d) Donner alors la valeur de $Sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Bon Travail